Devoir des vacances : vers la spécialité mathématiques de terminale

La correction de ce devoir sera publiée fin août sur le site du lycée.

Entrainez-vous ! Vous passerez à la rentrée un test diagnostic de 2h sur le même format.

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $I = [-6; 2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+4}$$

1. Etudier le sens de variation de f sur I.
2. Préciser les extrema de la fonction f sur I.
3. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque x lorsque x appartient à $[-4; 2]$.

Exercice 2

Un apiculteur a constaté qu'entre 2015 et 2019 le nombre d'abeilles adultes de sa ruche a diminué de 10% chaque année. Il avait acheté une colonie de $50\,000$ abeilles en 2015.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la suite modélisant le nombre d'abeilles dans la ruche en $2015 + n$.

1. Montrer que $u_1 = 45\,000$ et $u_2 = 40\,500$.
2. **a)** Exprimer pour tout entier naturel n, u_{n+1} en fonction de u_n.
   b) En déduire la nature de la suite (u_n).
   c) Exprimer u_n en fonction de n.
3. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
4. Déterminer le nombre d'abeilles qu'il y aura dans la ruche en 2025 si l'évolution se maintient.
5. A l'aide de la calculatrice, estimer en quelle année la population initiale de la colonie d'abeilles aura diminué de moitié.

Exercice 3

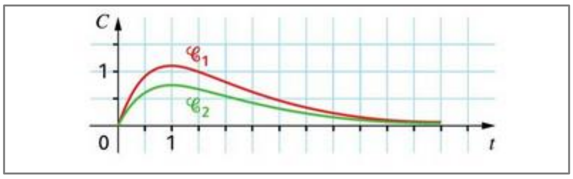
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$, de courbe représentative C.

1. a. Résoudre l'inéquation $f(x) < 0$.
   b. En déduire la position de la courbe C par rapport à l'axe des abscisses.
2. Déterminer la forme canonique de f.
3. Déterminer une équation de l'axe de symétrie de la courbe C et les coordonnées de son sommet.
4. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   b. En déduire, suivant les valeurs du réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de le courbe C avec la droite d'équation $y = -4$.
6. Etudier le position relative de la courbe C et de la droite D d'équation $y = -4x + 3$.
7. Tracer la droite D et la courbe C.

Exercice 4

Partie A. Etude graphique

Voici deux courbes C_1 et C_2 qui donnent, pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes, la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool. C est exprimée en gramme par litre (g/l) et t en heure.



1. La fonction C est définie sur $[0; +\infty[$ et pour tout réel $t \geq 0$, $C'(t)$ est la vitesse d'apparition de l'alcool dans le sang. A quel instant cette vitesse est –elle maximale ?
2. Une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool. Identifier sur le graphique la courbe correspondant à la personne le plus corpulente.

Partie B. Un cas particulier

On suppose ici que le taux d'alcool d'une personne, en fonction du temps en heure est modélisé par $C(t) = 2t \times e^{-t}$ pour $t \in [0; 12]$.

1. Etudier les variations puis construire le tableau de variation de C sur $[0; 12]$.
   Pour rappel : $(e^u)' = u'e^u$.
2. A quel instant le taux d'alcoolémie de cette personne est-il maximal ? Quelle est alors sa valeur ?
3. Pour les jeunes conducteurs, le code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux est supérieur ou égal à 0,2 g/l.
   En supposant que la personne est un jeune conducteur, déterminer au bout de combien de temps après avoir consommé de l'alcool le taux d'alcoolémie reprend une valeur conforme à la législation ?