Corrigé du devoir de vacances : vers la spécialité mathématique de terminales

Exercice 1

On donne f une fonction définie sur $I = [-6;2]$ par :

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2+4}$$

1°) **Etude des variations.**

f est le quotient de deux fonctions polynômes $x \longmapsto 2x+3$ et $x \longmapsto x^2+4$. Les fonctions polynomes sont derivables sur $\mathbb{R}$ et donc sur $[-6;2]$. De plus $x \longmapsto x^2+4$ est non nulle sur $[-6;4]$ car $x^2+4>0, \forall x \, \mathbb{R}$.

f est donc dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables.

Déterminons $f'(x)$ derivée de $f(x)$.

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = x^2+4$.

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - v'(x)\,u(x)}{(v(x))^2}$$

$u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$

donc
$$f'(x) = \frac{2 \times (x^2+4) - 2x(2x+3)}{(x^2+4)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2-6x}{(x^2+4)^2} = \frac{-2x^2-6x+8}{(x^2+4)^2} = \frac{-2(x^2+3x-4)}{(x^2+4)^2}$$

factorisons x^2+3x-4.

1 est une racine de x^2+3x-4. Le produit des deux racines x_1 et x_2 d'un polynôme est $\frac{c}{a}$ si le polynôme est de la forme $ax^2+bx+c=0$.

donc $x_1 \times x_2 = -4$ et $x_1 = 1$

donc $x_2 = -4$.

La forme factorisée de x^2+3x-4 est $(x-1)(x+4)$.

$$f'(x) = \frac{-2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$$

Etudions le signe de la derivée de f.

$x^2+4>0 \quad \forall x \in [-6;2]$ donc le signe de $f'(x)$ est le même ue celui de $-2(x+1)(x-4)$

dressons le tableau des variations de f.

x	-6		-4		1		2
$-2(x-1)(x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$-\frac{9}{40}$	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	1	↘	$7/8$

f est décroissante sur les intervalles $[-6;-4]$ et $[1;2]$ et croissante sur $[-4;1]$

2) D'après le tableau des variations le maximum de f est 1 et le minimum $-\frac{1}{4}$.

3) par lecture du tableau des variations sur $[-4;2]$ le minimum de f est $-\frac{1}{4}$ et son maximum 1 donc

$$\forall x \in [-4;2] \quad -\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$$

Exercice 2

1. en 2016 le nombre d'abeilles a diminué de 10% par rapport à 2015. En 2017 il aura diminué de 10% par rapport à 2016.

Ainsi $u_1 = u_0 \times 0,9 = 50000 \times 0,9 = 45000$

une baisse de 10 se traduit par un coefficient multiplicateur de $1 - \frac{10}{100} = 0,9$

et $u_2 = u_1 \times 0,9$
$= 45000 \times 0,9$
$u_2 = 40500$

2) a) Entre l'année $2015+n$ et l'année $2015+(n+1)$ le nombre d'abeilles diminue de 10% (donc est multiplié par 0,9) on a alors :

$$u_{n+1} = u_n \times 0,9 = 0,9\,u_n$$

nombre d'abeilles en $2015+(n+1)$

nombre d'abeilles en $2015+n$

b) (u_n) est une suite geométrique de raison $q=0,9$ et de premier terme 50000

c) $u_n = u_0 \times q^n$

$u_n = 50000 \times (0,9)^n$

3) Comme la raison est positive et inférieure à 1, alors (u_n) est décroissante.

4) Le nombre d'abeilles en 2025 est u_{10}.

$u_{10} = 50000 \times 0,9^{10} = 17433,92$
soit 17433 abeilles.

5) on a $u_6 = 26572,05$ et $u_7 = 23914,85$
c'est donc au courant de la 7ème année que le nombre d'abeilles aura demenué moitié (inférieur à 25000).

Exercice 3

1.) $f(x) < 0$
$\iff -3x^2+6x-4 < 0$

La resolution de cette inéquation passe par une étude du signe de $-3x^2+6x-4$.

Soit Δ le discriminant de $-3x^2+6x-4$.

$\Delta = 6^2 - 4 \times 3 \times -4 = 36 - 48 = -12 < 0$.

$\Delta < 0$ alors le signe de $-3x^2+6x-4$ est celui de $-3x^2$ à savoir négatif donc

$\forall x \in \mathbb{R}, \; -3x^2+6x-4 < 0$

$\Longrightarrow \boxed{S = \mathbb{R}}$

2) Déterminons une forme canonique de f.

$f(x) = -3\left(x^2 - 2x + \frac{4}{3}\right)$
$= -3\left[(x-1)^2 + \frac{4}{3} - 1\right]$

$\boxed{f(x) = -3(x-1)^2 - 1}$

3) l'axe de symétrie a pour équation $x = 1$ et le sommet de la courbe $(1; f(1))$ donc $(1;-1)$.

4) f étant une fonction polynôme il n'est pas utile d'étudier sa derivée. cela relève des propriétés vues en cours.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↗	-1	↘	

b) Lorsque $m > -1$ m n'a pas d'antécédent, donc $f(x) = m$ n'a pas de solution.

si $m = -1$ $f(x) = m$ a une seule solution à savoir 1.

si $m < -1$ $f(x) = m$ admet deux solutions.

5) Determiner les points d'intersection de C avec $y = -4$ revient à resoudre $f(x) = -4$. cette équation admet deux solutions.

$f(x) = -4$
$\iff -3x^2+6x-4 = -4$
$\iff -3x^2+6x = 0$
$\iff -3x(x-2) = 0$
$\iff x = 0$ ou $x = 2$

Les points d'intersection sont $(0;-4)$ et $(2;-4)$

6) Position relative de C et D.
il suffit d'etudier le signe de $f(x)-(-4x+3)$

$f(x)-(-4x+3) = -3x^2+6x-4+4x-3$
$= -3x^2+10x-7$

Δ le discriminant est
$\Delta = 10^2 - 4 \times -3 \times -7$
$\Delta = 16 > 0$ don $-3x^2+10x-7$ admet deux racines.

$x_1 = \frac{-10+\sqrt{16}}{-6}$ et $x_2 = \frac{-10-\sqrt{16}}{-6}$

$x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{-14}{-6} = \frac{7}{3}$

Etudions le signe de $-3x^2+10x-7$

x	$-\infty$		1		$7/3$		$+\infty$
$-3x^2+10x-7$		$-$	0	$+$	0	$-$	

sur les intervalles $]-\infty; 1[$ et $]7/3; +\infty[$
$-3x^2+10x-7 < 0$
$\Rightarrow f(x) - (-4x+3) < 0$ donc C est en dessous de D

sur l'intervalle $]1; 7/3[$; $-3x^2+10x-7 > 0$ donc C est au dessus de D.

C et D se coupent aux points d'abscisses 1 et $7/3$

7) le tracé de D et C est evident à l'aide d'une calculatrice.

Exercice 4

Partie A

1°) D'après le graphique C' est maximale à $t=0$. en $t=0$ la tangente à la courbe a une pente très forte.

2°) La courbe C_1 a une augmentation plus rapide elle represente donc l'alcoolemie de la personne de faible corpulence. donc la courbe C_2 est celle de la personne la plus corpulente.

Partie B

1) $t \longmapsto e^{-t}$ est derivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que $t \to 2t$. donc $t \longmapsto 2t\,e^{-t}$ est donc derivable sur $\mathbb{R}$ et par restriction sur $[0;12]$

Calculons $C'(t)$.

$C(t) = u(t) \times v(t)$ avec $u(t) = 2t$ et $v(t) = e^{-t}$.

$C'(t) = u'(t) \times v(t) + v'(t)\,u(t)$.

$u'(t) = 2$ et $v'(t) = -e^{-t}$

alors $C'(t) = 2e^{-t} - 2t\,e^{-t} = (2-2t)\,e^{-t}$
$= -2e^{-t}(t-1)$

Etudions le signe de $C'(t)$

t	0		1		12
$t-1$		$-$	0	$+$	
$-2e^{-t}$			$-$		
$C'(t)$		$+$	0	$-$	
C	0	↗	$2e^{-1}$	↘	$24e^{-12}$

2) le taux d'alcool est maximal à $t=1$ sa valeur est de $2e^{-1} \approx 0,736$ g/L.

3) A l'aide de la calculatrice on va chercher l'antécédent de 0,2 par C sur l'intervalle $[1;12]$

A l'aide de la calculatrice on trouve environ 3,5772 comme antécedent de 0,2.

Un jeune conducteur devrait donc attendre 3 heures et 35 minutes avant de reprendre le volant.