Correction du devoir des vacances : vers la spécialité mathématiques de première

1) a) $(3x+1)(2x-5)$
$= 6x^2 - 15x + 2x - 5$
$= 6x^2 - 13x - 5$

b) $(4x+7)(4x-7)$
$= (4x)^2 - 7^2$
$= 16x^2 - 49$

2) a) $2x^2 - 12x + 18$
$= 2(x^2 - 6x + 9)$
$= 2(x-3)^2$

b) $(2x+1)^2 - 36$
$= (2x+1)^2 - 6^2$
$= (2x+1-6)(2x+1+6)$
$= (2x-5)(2x+7)$

3) a) $x^2 + 5 = 30$
$\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$
$\Leftrightarrow (x+5)(x-5) = 0$
$\Leftrightarrow x+5 = 0$ ou $x-5 = 0$
$\Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 5$
Ainsi $S = \{-5 ; 5\}$.

b) $x^2 - 8x = 2x - 25$
$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 = 0$
$\Leftrightarrow (x-5)^2 = 0$
$\Leftrightarrow x - 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 5$
Ainsi $S = \{5\}$.

c) Valeur interdite : 2.
$\dfrac{x^2}{x-2} = \dfrac{4}{x-2}$
$\Leftrightarrow x^2 = 4$
$\Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$
$\Leftrightarrow (x+2)(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow x+2 = 0$ ou $x-2 = 0$
$\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$
Ainsi $S = \{-2\}$.

4) a) $x^2 > 4$

$\Leftrightarrow \; x^2 - 4 > 0$

$\Leftrightarrow \; x^2 - 2^2 > 0$

$\Leftrightarrow \; (x+2)(x-2) > 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$

b) $\dfrac{2}{x-3} \leqslant 1$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{2}{x-3} - 1 \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{2}{x-3} - \dfrac{x-3}{x-3} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{2-(x-3)}{x-3} \leqslant 0$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{5-x}{x-3} \leqslant 0$

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$5-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{5-x}{x-3}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty\,;3[\,\cup\,[5\,;+\infty[$

c) $\dfrac{1}{x+5} < \dfrac{1}{x+6}$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{1}{x+5} - \dfrac{1}{x+6} < 0$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{(x+6)}{(x+5)(x+6)} - \dfrac{(x+5)}{(x+5)(x+6)} < 0$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{(x+6)-(x+5)}{(x+5)(x+6)} < 0$

$\Leftrightarrow \; \dfrac{1}{(x+5)(x+6)} < 0$

x	$-\infty$		-6		-5		$+\infty$
$x+5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+6$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{1}{(x+5)(x+6)}$		$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$	

$S =]-6\,;-5[$

5) a) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{HF}$
b) $\overrightarrow{EH}+2\overrightarrow{IF}=\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{EF}$

6) a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CA}$
b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

7) a) $4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$
$\Leftrightarrow\ 4\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{CA}$
$\Leftrightarrow\ 4\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=5\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{BA}=4\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow\ -\overrightarrow{BA}=-4\overrightarrow{AC}$
$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{AC}$

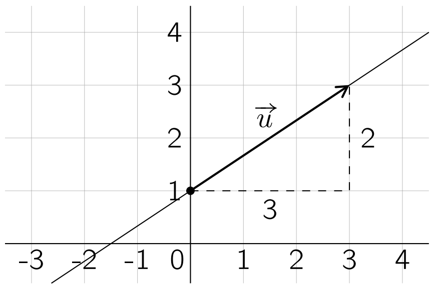
8) a) $\det(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{v})=3\times2-(-5)\times4=6+20=26\neq0$,
donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$.

c) On a $(2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v})(2\times3+3\times4\ ;\ 2\times(-5)+3\times2)$,
donc $(2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v})(6+12\ ;\ -10+6)$,
donc $(2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v})(18\ ;\ -4)$.

9) a) On a $\overrightarrow{AB}(2\ ;\ 4)$ et $\overrightarrow{CD}(1\ ;\ -2)$,
donc $\det(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{CD})=2\times(-2)-4\times1=-4-4=-8\neq0$,
donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

b) $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\ ;\ \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)=\left(\dfrac{2+4}{2}\ ;\ \dfrac{3+7}{2}\right)=\left(\dfrac{6}{2}\ ;\ \dfrac{10}{2}\right)=(3\ ;\ 5)$

10) 

a) $\overrightarrow{u}(3\ ;\ 2)$ est un vecteur directeur de d.
b) L'équation réduite de la droite d est $y=\dfrac{2}{3}x+1$.
c) $\dfrac{2}{3}x_A+1=\dfrac{2}{3}\times7+1=\dfrac{17}{3}\neq y_A$, donc $A\notin d$.

11) On a $2\times5-3\times3=10-9=1\neq0$, donc les deux droites sont sécantes.

$$\begin{cases}2x+3y=5\\3x+5y=7\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+9y=15\\6x+10y=14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+9y=15\\(6x+9y)-(6x+10y)=15-14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+9y=15\\-y=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+9y=15\\y=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x+9\times(-1)=15\\y=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x=24\\y=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-1\end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x\,;\,y)=(4\,;\,-1)$

Ainsi, l'intersection des deux droites est le point $I(4\,;\,-1)$.

12) a) $I=[0\,;\,20]$

b) $DP=AD-AP=20-x$

c) $f(x)=AM\times AP=x^2$

$$g(x)=\frac{DC\times DP}{2}=\frac{20\times(20-x)}{2}=10\times(20-x)=-10x+200$$

d) On a $f(0)=0^2=0$, donc f correspond à la courbe noire et g à la courbe grise.

e) On conjecture que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x)\geqslant g(x)$ est l'intervalle $[10\,;\,20]$, autrement dit que l'aire du carré $AMNP$ est supérieure à celle du triangle DNC si la distance AM est comprise entre 10 et 20.

f) $f(x)\geqslant g(x)$
$\Leftrightarrow x^2\geqslant -10x+200$
$\Leftrightarrow x^2+10x-200\geqslant 0$

g) $(x-10)(x+20)$
$=x^2+20x-10x-200$
$=x^2+10x-200$

h) Si $x\in[0\,;\,20]$, alors :

$f(x)\geqslant g(x)$
$\Leftrightarrow x^2+10x-200\geqslant 0$
$\Leftrightarrow (x-10)(x+20)\geqslant 0$
$\Leftrightarrow x-10\geqslant 0$ (en divisant par $x+20$ qui est strictement positif car $x\geqslant 0$)
$\Leftrightarrow x\geqslant 10$

On trouve ainsi algébriquement que l'ensemble des solutions de l'inéquation est l'intervalle $[10\,;\,20]$, ce qui valide le résultat conjecturé graphiquement.