Devoir des vacances : vers la spécialité mathématiques de première

La correction de ce devoir sera publiée fin août sur le site du lycée.
Entraînez-vous ! Vous passerez à la rentrée un test diagnostic de 2 h sur le même format.

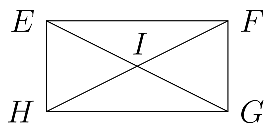
1) Développer et réduire les expressions suivantes.
   a) $(3x+1)(2x-5)$
   b) $(4x+7)(4x-7)$

2) Factoriser les expressions suivantes.
   a) $2x^2-12x+18$
   b) $(2x+1)^2-36$

3) Résoudre les équations suivantes.
   a) $x^2+5=30$
   b) $x^2-8x=2x-25$
   c) $\dfrac{x^2}{x-2}=\dfrac{4}{x-2}$

4) Résoudre les inéquations suivantes.
   a) $x^2>4$
   b) $\dfrac{2}{x-3}\leqslant 1$
   c) $\dfrac{1}{x+5}<\dfrac{1}{x+6}$

5) Dans la figure suivante, $EFGH$ est un rectangle de centre I.



   Donner un vecteur égal à :
   a) $\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HE}$,
   b) $\overrightarrow{EH}+2\overrightarrow{IF}$.

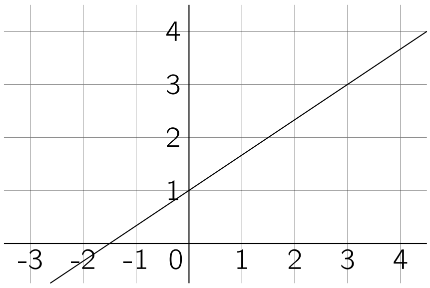
6) Soient A, B, C, D des points du plan. Montrer que :
   a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$,
   b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$.

7) Dans chacun des cas suivants, exprimer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
   a) $4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$
   b) $\overrightarrow{BC}=5\overrightarrow{AC}$

8) Soient $\vec{u}(3\,;-5)$ et $\vec{v}(4\,;2)$.
   a) Déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
   b) Calculer la norme du vecteur $\vec{u}$.
   c) Calculer les coordonnées du vecteur $2\vec{u}+3\vec{v}$.

9) Soient $A(2\,;3)$, $B(4\,;7)$, $C(5\,;0)$, $D(6\,;-2)$.
   a) Déterminer si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
   b) Déterminer les coordonnées du milieu du segment $[AB]$.

10) Soit d la droite représentée ci-dessous.

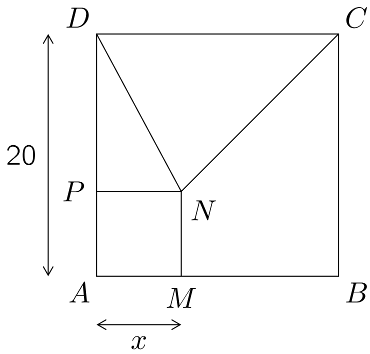


a) Déterminer un vecteur directeur de d.
b) Déterminer l'équation réduite de la droite d.
c) Déterminer si le point $A(7\ ;\ 6)$ appartient à la droite d.

11) Montrer que les droites du système ci-dessous sont sécantes,
puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

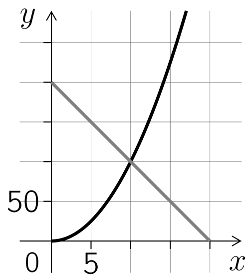
$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x + 5y = 7 \end{cases}$$

12) On considère un carré $ABCD$ de côté 20. Un point M se déplace sur le segment $[AB]$. On note x la distance AM. Les points P et N sont tels que $AMNP$ soit un carré avec $P \in [AD]$. On note $f(x)$ l'aire du carré $AMNP$ et $g(x)$ l'aire du triangle DNC.



a) Déterminer l'intervalle I des valeurs possibles pour x.
b) Exprimer la longueur DP en fonction de x.
c) Montrer que pour tout $x \in I$, on a $f(x) = x^2$ et $g(x) = -10x + 200$.

On a représenté ci-dessous les courbes respectives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ des fonctions f et g.



d) Identifier chacune des courbes en justifiant brièvement.
e) Conjecturer graphiquement l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$. Interpréter concrètement ce résultat.

On souhaite vérifier algébriquement la conjecture émise précédemment.
f) Montrer que l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ est équivalente à $x^2 + 10x - 200 \geqslant 0$.
g) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 10x - 200 = (x - 10)(x + 20)$.
h) Résoudre alors algébriquement l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$, et confronter ce résultat avec celui obtenu précédemment.